

文章编号:1000-8055(2009)11-2612-06

基于预定啮合特性的点啮合齿面设计方法

周凯红^{1,2}, 唐进元¹, 严宏志¹

- (1. 中南大学 机电学院 现代复杂装备设计与极端制造教育部重点实验室, 长沙 410075;
2. 桂林航天工业高等专科学校 机械系, 桂林 541004)

摘 要: 针对格里森螺旋锥齿轮齿面设计方法无法在整个齿面接触传动过程中有效控制齿面啮合特性的不足, 论述一种按预定的啮合特性设计点啮合齿面的理论和方法: 啮合齿面的接触迹线上每一点的几何结构按预定的齿面啮合特性要求设计, 而与特定的机床结构参数无关. 啮合点的二阶接触参数通过弹性齿轮副的载荷-变形效应条件, 而不是接触区的位置、大小和形状来设计. 实例计算和分析表明本文的点啮合齿面设计方法是格里森齿面设计方法在数控技术条件下的发展和完善.

关 键 词: 齿面啮合特性; 条件数; 螺旋锥齿轮; 点啮合齿面

中图分类号: TH132. 41

文献标识码: A

Research on meshing characteristics-based design of point-contact tooth surface

ZHOU Kai-hong^{1,2}, TANG Jin-yuan¹, YAN Hong-zhi¹

- (1. Key Laboratory of Modern Complex Equipment Design and Extreme Manufacturing, Ministry of Education, School of Mechanical and Electrical Engineering, Central South University, Changsha 410075, China;
2. Department of Machinery Engineering, Guilin College of Aerospace Technology, Guilin 541004, China)

Abstract: For deficiency of the Gleason design technique for the spiral bevel gears, in which the meshing function is unable to be predesigned in whole tooth contact, a theory for the meshing characteristic-oriented design of point-contact tooth surface was presented. The geometry of the points on the path of contact was determined from the predesigned meshing characteristics, unrelated to any specific machine tool adjustment parameter. The second-order parameters of tooth flank were studied by load-deformation condition of elastic gears instead of the dimension, position and orientation of the contact ellipse. A numerical example was given to prove that above-mentioned design method is improvement and development of Gleason spiral bevel gears design method.

Key words: meshing characteristics; condition number; spiral bevel gears; point-contact tooth surface

保证螺旋锥齿轮副具有优良的啮合特性是螺旋锥齿轮设计与制造技术的重要内容. 齿面结构

对螺旋锥齿轮副的啮合特性至为关键. 在格里森螺旋锥齿轮技术^[1]中, 由于机械式齿轮加工机床

收稿日期: 2009-03-21; 修订日期: 2008-08-10

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973 计划)(2005CB724100); 国家自然科学基金(50875263)

作者简介: 周凯红(1968-), 男, 副教授, 博士生, 主要研究方向为复杂齿轮的数字化制造技术. E-mail: 681023 @163.com

在高速重载下,点啮合齿面在每一时刻以接触迹线上的一点为中心因弹性变形而作微面接触,两齿面的安装位置也因齿轮轴的弹性变形而出现误差,此时整个齿轮副系统应该作为一个多弹性体动力系统来研究,必须考虑载荷的变形效应。在这种情况下,齿面上沿接触迹线上的各接触点的位置及其几何结构是这一弹性动力系统的初始条件,与齿面啮合特性和齿面接触强度及弯曲强度直接相关,应按齿面啮合特性和强度条件精确设计,而对于齿面其它区域,只要满足加载后的接触强度并避免齿面干涉即可,因此其几何结构

的设计可以宽松或近似.

2.1 齿面 $\Sigma^{(1)}$ 的结构和两齿轮的相对运动关系

齿面 $\Sigma^{(1)}$ 及其上的接触点迹线一般应按齿轮 1 的弯曲强度条件来确定它们的形状和结构. 为了使问题简化, 在本研究中, 假定齿面 $\Sigma^{(1)}$ 及其上的接触点迹线 $L^{(1)}$ 已经预先给定 (如图 2).

两齿轮传动时的相对运动规律影响齿轮传动时的振动、噪声及传动的稳定性. 在齿面设计中, 它是按预先要求需满足的设计目标. 一般它这样

定义: 以加工参考点 M 为啮合的起点, 在这一点啮合时, 两齿轮的传动比 i_{12}^0 为两齿轮的齿数比 $\pm Z_2/Z_1$, 在其它啮合点的传动比函数为

$$i_{12} = i_{12}^0 + 2c_2\phi_2 + \cdots + nc_n\phi_2^{n-1} \tag{1}$$

$c_i (i = 2, \cdots, n)$ 为多项式系数, 按预定的两轮的对运动规律给出.

由于不影响分析结果, 故可令齿轮 2 的角速度 $\omega = 1 \text{ rad/s}$, 则在任意接触点处的齿面相对速度在坐标系 $O^{(1)}-x^{(1)}y^{(1)}z^{(1)}$ 可表示为^[2]

$$V_{(1)}^{(12)} = M_{1(1)}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{i_{12}} \cos \Sigma - 1 & -\frac{1}{i_{12}} \sin \Sigma & 0 \\ 1 - \frac{1}{i_{12}} \cos \Sigma & 0 & 0 & -\frac{E}{i_{12}} \cos \Sigma \\ \frac{1}{i_{12}} \sin \Sigma & 0 & 0 & \frac{E}{i_{12}} \sin \Sigma \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M_{1(1)} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & y_1^{(1)} & z_1^{(1)} & 1 \end{bmatrix}^T \tag{2}$$

2.2 预定一阶啮合特性设计 $\Sigma^{(2)}$ 的齿面结构

沿给定接触迹线并按预定的相对运动规律传动的齿面应满足如下啮合条件

$$r_2^{(2)} = M_{(2)2} M_{21} M_{1(1)} r_1^{(1)} \tag{3}$$

$$n_1^{(1)} \cdot V_{(1)}^{(12)} = 0 \tag{4}$$

式(4)写在坐标系 $O^{(1)}-x^{(1)}y^{(1)}z^{(1)}$ 中. 两齿轮传动中的转角函数关系可由式(1)得

$$\phi_1 = \int_{\phi_1}^{\phi_2} i_{12} d\phi_2 = \phi_{01} + i_{12}^0 \phi_2 + c_2 \phi_2^2 + \cdots + c_n \phi_2^n \tag{5}$$

式中 ϕ_{01} 表示使啮合的起始位置与齿轮 2 转动的起始位置重合, 即 $\phi_2 = 0$ 时, 齿轮 1 相对固定坐标系 $O^1-x^1y^1z^1$ 转过的角度. 将加工参考点在齿轮 $\Sigma^{(1)}$ 的固连运动坐标系中的坐标和法向量么矢代入式(3)~(4), 并解以 ϕ_{01} 为未知数的方程即得 ϕ_{01} .

同时满足式(3)~(5) 将构造一个曲面, 它和齿面 $\Sigma^{(1)}$ 以线接触相啮合, 即完全共轭, 这就是所谓的 $\Sigma^{(2)}$ 的理论齿面. 对于可以不考虑啮合过程中载荷产生的变形效应的低速轻载情形, 这个曲面与齿面 $\Sigma^{(1)}$ 的啮合传动是可以实现式(1) 所要求的运动传递的. 但是, 对于必须考虑啮合过程中载荷产生的变形效应的高速重载情形, 这样的啮合传动根本无法实现. 在这种情况下, 必须考虑对 $\Sigma^{(2)}$ 的理论齿面的啮合点处的二阶参数按预定的安装误差敏感度和齿面接触强度等二阶啮合特性进行设计, 使两齿面沿给定接触迹线 $L^{(1)}$ 进行点啮合.

2.3 预定二阶啮合特性设计 $\Sigma^{(2)}$ 的齿面结构

如上所述, 应对 $\Sigma^{(2)}$ 的理论齿面进行二阶接触参数设计以保证两齿面作点啮合, 但为了保证这种点啮合仍能满足式(1) 所表达的预定的两齿轮的相对运动规律, 齿面 $\Sigma^{(2)}$ 沿接触迹线 $L^{(2)}$ 切线 $e_{t1}^{(2)}$ 方向的二阶参数不能修改, 故齿面 $\Sigma^{(2)}$ 和齿面 $\Sigma^{(1)}$ 沿 $e_{t1}^{(2)}$ 方向的二阶参数依然满足线啮合理论中的的诱导法曲率和诱导短程挠率公式, 即

$$\kappa_{nt1}^{(12)} = \frac{(a \cdot e_{t1})^2}{n \cdot q + a \cdot V_{12}} \tag{6}$$

$$\tau_{gt1}^{(12)} = \frac{(a \cdot e_{t1})(a \cdot e_{t2})}{n \cdot q + a \cdot V_{12}} \tag{7}$$

式中

$$a = \kappa_{nv}^{(1)} V^{(12)} + \tau_{gv}^{(1)} n \times V^{(12)} + \omega_2 \times n \tag{8}$$

$$q = \omega_2 \times (\omega_1 \times r_1) + V^{(12)} \times \omega_1 + \frac{d\omega_2}{d\phi_2} \times r_1 \tag{9}$$

上述 4 个公式中各向量都写在同一坐标系中. 其中 $\kappa_{nv}^{(1)}$, $\tau_{gv}^{(1)}$ 分别是齿面 $\Sigma^{(1)}$ 沿相对速度 $V^{(12)}$ 方向的法曲率和短程挠率.

设二阶修形后在接触点处两齿面公切平面上沿 $e_{t1}^{(2)}$ 的垂直方向 $e_{t2}^{(2)}$ 的相对法曲率为 $\Delta \kappa_{nt2}^{(12)}$, 则齿面 $\Sigma^{(2)}$ 沿 $e_{t1}^{(2)}$, $e_{t2}^{(2)}$ 两个相互垂直方向的二阶参数为

$$\kappa_{nt1}^{(2)} = \kappa_{nt1}^{(1)} - \kappa_{nt1}^{(12)} \tag{10}$$

$$\kappa_{nt2}^{(2)} = \kappa_{nt2}^{(1)} - \Delta \kappa_{nt2}^{(12)} \tag{11}$$

$$\tau_{gt1}^{(2)} = \tau_{gt1}^{(1)} - \tau_{gt1}^{(12)} \tag{12}$$

式中 $\Delta \kappa_{nt2}^{(12)}$ 由如下二阶啮合特性来设计:

1) 预定接触迹线位置对安装误差的敏感度

在空间机构和机器人的研究中,有关机构雅可比矩阵的条件数的理论已经得到广泛的论述和应用^[3].本文把点啮合齿轮传动机构作为一种特殊的空间机构,用机构雅可比矩阵的条件数来作为齿面接触点位置误差对两齿面安装位置的误差敏感性的度量指标.与文献[2]的有关论述不同,本方法认为齿面安装误差敏感性的数学实质是线

性方程组解的奇异性,关于齿面接触点位置误差和两齿面安装位置的误差的线性方程组系数矩阵的条件数是综合全面度量齿面接触点位置误差对两齿面安装位置的误差敏感性的指标.

弹性齿轮副因载荷作用而变形,使齿轮定位参数相对理论值发生偏离 $dH, dE, dJ, d\Sigma$, 这就是齿轮安装位置误差.对啮合条件式(3),(4)求微分,并分别点乘么矢 $e_{t1}^{(2)}$ 及么矢 $e_{t2}^{(2)}$ 得

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ \kappa_{nt1}^{(1)} & \tau_{gt1}^{(1)} & -\kappa_{nt1}^{(2)} & -\tau_{gt1}^{(2)} \\ \tau_{gt1}^{(1)} & \kappa_{nt1}^{(2)} & -\tau_{gt1}^{(2)} & -\kappa_{nt1}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ds_1^{(1)} \\ ds_2^{(1)} \\ ds_1^{(2)} \\ ds_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^1 \cdot e_1^1 & k^2 \cdot e_1^2 & (i^1 \times r_1^1) \cdot e_1^1 & i^1 \cdot e_1^1 \\ -k^1 \cdot e_2^1 & k^2 \cdot e_2^2 & (i^1 \times r_1^1) \cdot e_2^1 & i^1 \cdot e_2^1 \\ 0 & 0 & (i^1 \times n_1^1) \cdot e_1^1 & 0 \\ 0 & 0 & (i^1 \times n_1^1) \cdot e_2^1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{(n_2^2 \times k^2) \cdot r_2^2} \begin{pmatrix} k^2 \times r_2^2 \cdot e_1^2 \\ k^2 \times r_2^2 \cdot e_2^2 \\ k^2 \times r_2^2 \cdot e_1^1 \\ k^2 \times r_2^2 \cdot e_2^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k^1 \cdot n_1^1 & -k^2 \cdot n_2^2 \\ (n_1^1 \times i^1) \cdot r_1^1 & -i^1 \cdot n_1^1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} dH \\ dJ \\ d\Sigma \\ dE \end{pmatrix} \quad (13)$$

令上式中等号左边的方阵为 K ,列阵为 dS ,等号右边括号内方阵为 W ,列阵为 dB ,则式(13)为

$$W^{-1} K dS = dB \quad (14)$$

K 由齿面的二阶参数组成, W 由齿面零阶参数和一阶参数组成(见图1). dS 是接触点位置误差列阵,其中的元素是啮合斑点位置在两个齿面(上标1、2)上沿接触迹线的切线方向(下标1)及其公切平面上的垂直方向(下标2)的误差; dB 是安装误差列阵.这两种误差之间是线性关系,啮合点位置误差对安装误差的敏感度由矩阵 $A = W^{-1} K$ 的条件数 $Cond_2(A)$ 反映,故应按下面的不等式来设计齿轮副的啮合点位置误差对安装误差的敏感度^[4]

$$Cond_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 \leq \varepsilon \quad (15)$$

其中 $\|A\|_2$ 为方阵 A 的2-诱导范数(欧氏范数). ε 是预定的接触点位置误差对安装误差的敏感度的上界.考虑到方阵 W 中的齿面零阶参数和一阶参数已经确定,不能再改变,因此,式(15)可确定关于接触点处啮合齿面沿 $e_{t2}^{(2)}$ 的相对法曲率 $\Delta\kappa_{nt2}^{(12)}$ 的一个不等式.

2) 满足齿面接触强度的条件

齿面接触应力的大小直接决定齿面疲劳破坏产生的几率.本文按 Hertz 公式来设计满足齿面接触强度条件的点啮合齿面.

根据弹性理论,两光滑齿面接触时,在接触点附近可近似处理为两个密切抛物面接触.施加载荷后在接触点形成一瞬时接触椭圆,椭圆中心

处有最大接触压应力

$$\sigma = \frac{3P}{2\pi ab} \quad (16)$$

式(16)中 P 为作用载荷; a, b 分别由接触点处的齿面二阶参数确定^[5].按接触强度条件

$$k\sigma \leq [\sigma] \quad (17)$$

k 是不同强度理论对应的相当应力系数,可按 a/b 值查表得到; $[\sigma]$ 是齿面的许用接触应力.

由上式及欧拉-贝特朗公式可确定在接触点啮合齿面沿 $e_{t2}^{(2)}$ 的相对法曲率 $\Delta\kappa_{nt2}^{(12)}$ 的一个不等式.

3) 为了保证齿面在接触点不发生曲率干涉

$$\kappa_{nt1}^{(12)} \Delta\kappa_{nt2}^{(12)} - \left(\tau_{gt1}^{(12)} \right)^2 \geq 0 \quad (18)$$

4) 为了避免诱导法曲率最小值对应的主方向与齿长方向的夹角过大而引起不完整接触区^[1],对于大轮凸面

$$\left| \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\tau_{gt1}^{(12)}}{\Delta\kappa_{nt2}^{(12)} - \kappa_{nt1}^{(12)}} \right) \right| \leq [\theta] \quad (19a)$$

对于大轮凹面

$$\left| \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\tau_{gt1}^{(12)}}{\Delta\kappa_{nt2}^{(12)} - \kappa_{nt1}^{(12)}} \right) \right| \leq [\theta] \quad (19b)$$

$[\theta]$ 是为避免对角接触,诱导法曲率绝对值最小值对应的主方向与齿长方向的夹角的许用值. $[\theta]$ 为一个接近于零的正值,可由实验或 LTCA 来确定.

综上,齿面 $\Sigma^{(2)}$ 沿 $e_2^{(2)}$ 方向的相对法曲率的修正值 $\Delta\kappa_{n12}^{(12)}$ 由不等式(15)、式(17) ~ (18)、式(19a) (或(19b)) 的交集来确定. 但是,当这些不等式不相容时,就只能改变原先预定的接触迹线 $L^{(1)}$ 或预定的传动比函数来重新设计齿面 $\Sigma^{(2)}$.

将 $\Delta\kappa_{n12}^{(12)}$ 值代入式(11),由式(10) ~ (12) 得到齿面 $\Sigma^{(2)}$ 在两个垂直方向的法曲率和短程挠率,再由欧拉-贝特朗公式,可以完全确定接触点处齿面 $\Sigma^{(2)}$ 的二阶微分结构.

3 齿面设计实例及其结果

下面以齿轮 1(大轮) 齿面成形法加工的弧齿锥齿轮副为例说明上述基于预定啮合特性的齿面设计方法的参数结果. 齿轮副基本参数如表 1.

表 1 齿轮副主要设计参数表

Table 1 Design parameters of spiral gears

齿轮参数名称	数值
大轮齿数 z_1	42
大轮正车面法向压力角 $\alpha_{01}/(^{\circ})$	20
轴交角 $\Sigma/(^{\circ})$	90
大轮分锥角 $\delta_1/(^{\circ})$	15.9454
大轮根锥角 $\delta_{i1}/(^{\circ})$	14.9517
大轮面锥角 $\delta_{t1}/(^{\circ})$	19.2041
齿宽中点螺旋角 $\beta/(^{\circ})$	34.3541
齿宽中点锥距 R_m/mm	139.743
齿宽中点法向模数 m_n/mm	5.282
大轮法向高度变位系数 x_{n1}/mm	-0.533
大轮法向切向变位系数 x_{t1}/mm	0.08
法向齿顶高系数 h_a^*	1.0
法向顶隙系数 c^*	0.25
刀盘半径 r_0/mm	139.743
小轮齿数 z_2	12
小轮法向高度变位系数 x_{n2}/mm	0.533
小轮法向切向变位系数 x_{t2}/mm	-0.08

齿面预定的啮合性能要求为

1) 齿轮 1 齿面凸面 $\Sigma^{(1)}$ 上的接触点迹线满足

$$Y = h_{t1} - X \cot 15^{\circ} \tag{20}$$

即接触迹线在大轮轴截面上的投影是一直线. 它与齿高方向的夹角为 15° . h_{t1} 为大轮在齿宽中点处的齿根高.

2) 预定的相对运动规律

$$\phi_1 = \phi_{01} + i_{12}^0 \phi_2 + 0.002 \phi_2^2 \tag{21}$$

3) 预定的接触迹线位置对安装误差的敏感度

$$\text{Cond}_2(A) \leq \varepsilon = 1.3 \tag{22}$$

4) 预定的齿面接触强度条件

$$k\sigma \leq [\sigma] = 1500 \text{ N/mm}^2 \tag{23}$$

5) 诱导法曲率最小值对应的主方向与齿长方向的夹角的许用值

$$[\theta] = 3^{\circ} \tag{24}$$

齿轮 2(小轮) 齿面凹面参数设计结果见表 2, 其中 $r_2^{(2)}$ 表示齿轮 2(小轮) 齿面上接触迹线上点的坐标; $n_2^{(2)}$ 表示对应点的法向么矢; $e_1^{(2)}, e_2^{(2)}$ 表示对应点的两个主方向么矢. 以上参数都写在与齿轮 2(小轮) 固结的坐标系中. $\kappa_1^{(2)}, \kappa_2^{(2)}$ 表示对应点的主曲率.

表 2 中给出了 4 个点的设计参数. 在实际设计中应根据加工中数控轴运动方程需要达到的多项式拟合的阶数来确定给出的点的个数.

图 3 是按本文所述方法设计的小轮理论齿面,它是由计算所得的齿面零阶参数 $r_2^{(2)}$ 拟合得到的. 它没有按本文所述预定的齿面二阶啮合特性进行修形,因此,它并不是我们设计出的目标齿面,而是大轮的包络面. 它与设计目标齿面的关系是:它与设计目标齿面在接触迹线处有二阶切触,在接触迹线以外的区域,设计目标齿面与该曲面对应点之间沿大轮对应点法矢方向有很小的偏差.但是,图 3 所示的齿面数据可以作为数控加工具有预定啮合特性的点啮合齿面的数据^[6].

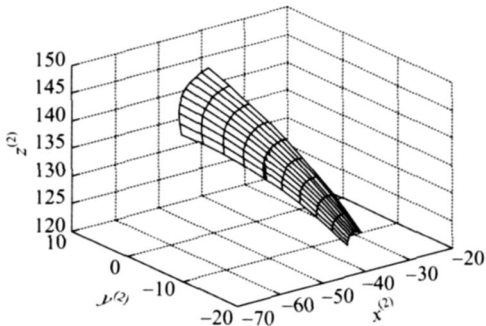


图 3 大轮包络齿面及其上的接触迹线

Fig. 3 Envelope to family of gear tooth surface and contact path

对所设计的齿轮副进行齿面接触分析,得到大轮工作面的 TCA 分析结果(如图 4). 由于本文所论述的基于预定啮合特性的点啮合齿面设计方法对接触迹线上各点的二阶参数采取的是逐点设计和控制,因此,其所得到的接触斑点的大小和方向完全和设计要求一样:基本没有变化. 传动误差曲线也是与预定传动误差曲线一样. 图 4 完全是由表格 2 中的数据得到的.

表 2 小轮齿面凹面参数设计结果

Table 2 Design results of concave tooth surfaces of pinion

参数	数 值			
$r_2^{(2)} / \text{mm}$	(- 8.4612 , - 48.6874 , 133.3188)	(- 4.3459 , - 43.0664 , 134.4069)	(- 3.2692 , - 40.5839 , 134.8019)	(- 2.6442 , - 36.7249 , 135.2877)
$n_2^{(2)}$	(- 0.5193 , 0.5936 , 0.6148)	(- 0.6594 , 0.4854 , 0.5741)	(- 0.7202 , 0.4187 , 0.5531)	(- 0.8186 , 0.2644 , 0.5099)
$e_1^{(2)}$	(0.7155 , 0.4932 , 0.4936)	(0.8627 , 0.3318 , 0.3708)	(0.9248 , 0.2286 , 0.2896)	(0.9964 , - 0.0349 , 0.0546)
$e_2^{(2)}$	(- 0.5928 , - 0.1394 , 0.7892)	(- 0.5186 , - 0.1670 , 0.7733)	(- 0.4788 , - 0.1568 , 0.7324)	(- 0.4132 , - 0.0018 , 0.5257)
$\kappa_1^{(2)} / \text{mm}^{-1}$	- 0.0082	- 0.0087	- 0.0086	- 0.0070
$\kappa_2^{(2)} / \text{mm}^{-1}$	0.0289	0.0379	0.0420	0.0568

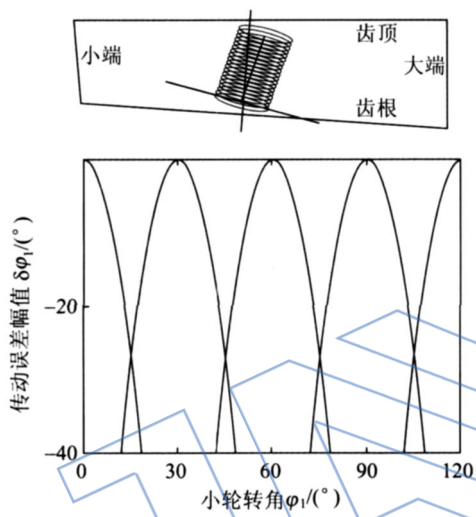


图 4 大轮工作面传动误差和齿面接触斑点

Fig.4 Rotary transmission and contact pattern of bearing tooth surface of gear

在格里森螺旋锥齿轮技术中,齿面设计的结果实际上只是接触迹线上一点(切齿计算参考点)的零至三阶参数.它只能直接满足切齿计算参考点处的啮合性能要求,而其它接触点的啮合性能要求只能通过其三阶参数间接近似满足.从表格 2 可以看出,本文的齿面设计方法的设计结果是接触迹线上每一点的零至二阶参数,它能满足齿面在整个啮合过程中每一个啮合点的啮合性能要求.展成每一啮合点都需要一组不同的机械式机床的加工调整参数.这显然是机械式锥齿轮展成机床所无法完成的.但是,具有万能运动功能的数控锥齿轮展成机床却能够实现这种齿面的设计结果^[6].

4 结 论

本文研究了一种按预定要求的齿面啮合特性

设计点啮合齿面的理论和方法.设计模型有以下特点:

- 1) 按预定啮合特性同等设计接触迹线上每一点的零至二阶齿面结构,设计结果由几何参数,而不是特定机床的调整参数来描述.
- 2) 齿面二阶接触参数通过弹性齿轮副的载荷-变形效应条件,而不是接触区的位置、大小和形状来设计.
- 3) 本设计方法是格里森齿面设计方法在数控技术条件下的发展和完善,是真正适应数控齿面展成技术的点啮合齿面设计方法.

参考文献:

[1] 曾韬. 螺旋锥齿轮设计与加工[M]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1989.

[2] 吴训成. 基于功能需求的弧齿锥齿轮齿面主动设计与先进制造技术研究[D]. 西安:西安交通大学,2000.

WU Xuncheng. Research on the function-oriented active tooth surface design and advanced manufacturing technology for the curved tooth bevel gears[D]. Xi'an: Xi'an Jiao-tong University, 2000. (in Chinese)

[3] Salisbury J K, Craig J J. Articulated hands: force control and kinematic issues[J]. The International Journal of Robotics Research, 1982, 1(1): 4-17.

[4] Varga R S. Matrix interactive analysis [M]. 2nd ed. Berlin: Springer, 2000.

[5] 徐秉业. 弹塑性力学及其应用[M]. 北京:机械工业出版社,1983.

[6] 周凯红,唐进元,曾韬. 基于预定啮合特性的点啮合齿轮的 CNC 制造技术研究[J]. 机械工程学报, 2009, 45(9): 173-182.

ZHOU Kaihong, TANG Jinyuan, ZENG Tao. Research on CNC manufacture of meshing characteristics-based design point-contact tooth surface [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2009, 45(9): 173-182. (in Chinese)